D'où : $\begin{cases} a+b=1 \\ a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a=-2 \end{cases}$

Donc : $\boxed{a=-2, b=3}$

Par la suite :

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(-2+\frac{3e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= \left[-2x+3\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$$

$$= \left[-2+3\ln(e+1)\right]-\left[0+3\ln 2\right]$$

$$= -2+3\ln(e+1)-3\ln 2$$

Donc : $\boxed{\int_0^1 h(x) = -2+3\ln\frac{e+1}{2}}$

Exercice 3

1) Pour $x \neq 1$ on a:

$$x+1-\frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2-1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2+2x+1-1}{x+1} = \frac{x^2+2x}{x+1}$$

ET par suite:

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^2}{2} - \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{2}-\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$= 2-\ln 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\ln 2.$$

2) $I = \int_0^1 (t+1).\ln(t+1)\,dt$

Integrant par parties:
On pose

$$U(t) = \ln(1+t) \rightarrow U'(t) = \frac{1}{1+t}$$

$$V'(t) = 1+t \rightarrow V(t) = \frac{(1+t)^2}{2}$$

Donc :

$$I = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\ln(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+t)^2}{2}.\frac{1}{1+t}dt$$

$$= \frac{4}{2}\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+t)dt$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Exercice 4

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}.$$

1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}; x \neq 0, x \neq -1$

$$= \frac{a(1+x)^2+b(1+x)x+cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{a(1+2x+x^2)+b(x+x^2)+cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{a+2ax+ax^2+bx+bx^2+cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

Donc on a: